Система Диофанта

W Cat

SHOUT
SHARE
IT

Annotation

Если вы хотите поразить одноклассников молниеносным решением квадратных уравнений, давайте развлечемся.

- Система Диофанта
- notes
  - 2
  - 3

Система Диофанта

Написано для Артёма.
Посвящается фанфикам по Поттеру.

«Я, может, только жить начинаю: на пенсию перехожу.»

= Точно — это про тебя.

— Математику, я люблю со школы, читал множество книг, а сейчас вот задумался, из всего чем нас мучили, в жизни пригодилась только элементарная арифметика[2].

Но может я просто не замечал, что некие практические задачи можно было бы решить дифференцированием, интегрированием, поиском экстремумов и подобным.

= Знаешь анекдот: Дети решите задачу «У Маши 4 груши...» «Но, Марья Ивановна мы проходили только про яблоки».

— Да, да я именно об этом. Для примера я взял квадратные уравнения, уж сколько нас ими жучили, сколько перерешали примеров, а за всю рабочую практику, ни разу не понадобилось... решил поискать в интернете, нечто подобное: «практическое применение квадратного уравнения»

= Представляю, чего ты там только не нашел. Потом проверю.

— Да, нашел много, но в одной из первых была ссылка на задачу сформулированную еще в древней Греции.

Два числа в сумме дают 20, а их произведение равно 96. *Ну, ясное дело, надо определить эти числа.*

Стало интересно, неужели я, такой крутой, не решу древнюю задачу.

Приведу это, совсем простое, решение подробно, по шагам, дабы ты смог его проверить.

1. Дана система:

$x + y = 20$

$xy = 96$

(фигурную скобочку системы на тексте не изобразить, да ты меня простишь)

2. из второй строки системы находим y

$y = 96 / x$

3. подставляем найденный у в первую строку

$x + 96/x = 20$

4. умножаем все на x

$x^2 + 96 = 20x$

5. переносим правую часть и приводим к общепринятому виду (это называется **приведенное** квадратное уравнение)

$x^2 — 20x + 96 = 0$

Вот тут я притормозил. Да, видимо жучили нас мало, за полвека формулу я забыл, если бы мне ее показали я узнал бы ее слету, вот, что значит нет постоянной практики.

= Так в чем проблема, посмотри в Интернете.

— Нет, легкие пути не для нас.

Тут я посмотрел на вторую строку системы

$xy = 96$

из этого следует, что в 96, в качестве сомножителей содержатся **оба** корня!!!

т.е. если, это самое, 96 разложить на **простые** сомножители (а это задача 6 класса) и из их комбинации выбрать дающие в сумме 20, то вот оно - дерево и мужик в пиджаке!!!

— Делаем, давай я изложу опять до идиотизма просто:

96 — четное — делим на два в результате 48
48 — четное — делим на два в результате 24
24 — четное — делим на два в результате 12
12 — четное — делим на два в результате 6
6 — четное — делим на два в результате 3

в итоге:

$96 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$

= Спасибо за идиота, но бухти дальше.

— Предположим что первый корень = 2 тогда второй 48

= Не подходит, в сумме не 20, а 50

— Хорошо, тогда первый корень $2 \cdot 2 = 4$, а второй $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24$

= Опять не пойдет, в сумме 28.

— Попытка номер... первый корень $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, а второй, что осталось: $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$

= Ну, надо же, угадал!

— Не угадал, а вычислил.

= Погоди, я проверю.

— Я уже все проверил. Вся сходится.

В том числе проверил и по стандартной формуле нахождения

корней квадратного уравнения, забавно, что при этой проверке я ошибся, запутался в арифметике.

= Не забавно, а показательно.

— Возможно. Так я наслаждался победой целый день, а на следующий — до меня дошло!!!

= Что дошло, к чему восклицания?

— Просмотри, выше изложенное, ничего не замечаешь?

= Пока ничего.

— Хорошо, изложу доступнее:

система:

$x + y = \mathbf{S}$

$xy = \mathbf{M}$

тождественна:

$x^2 - \mathbf{S}x + \mathbf{M} = 0$

= Ну, и что. Согласен, я тебе верю.

— В математике, верить нельзя. Надо проверять доказательства.

= Ладно, доказал, но к чему ты ведешь?

— Посмотри же! **Любое** приведенное квадратное уравнение легким движением можно превратить в систему, а точнее коэффициент S является суммой корней (с минусом), и коэффициент M их произведением.

Отсюда следует, что 90% «школьных» приведенных квадратных уравнений можно легко решить в уме.

Попробуем?

= Давай.

— Напомню последовательность действий:

1. разложение коэффициента M на простые сомножители

Простых чисел до 100 не так уж много:

2 3
2 3
5 9
8 9

2. выбор полученных корней в сумме дающих S

= Все понятно, поехали.

— Для $x^2 - 7x + 10 = 0$ корни будут 2 и 5.

= Да, я вижу, ($x^2 - [2+5]x + [2 \cdot 5] = 0$) проверим:

$2 \cdot 2 - 7 \cdot 2 + 10 = 4 - 14 + 10 = 0$

$5 \cdot 5 - 7 \cdot 5 + 10 = 25 - 35 + 10 = 0$

Все сошлось, я тоже хочу попробовать.

— Пробуй: $x^2 — 16x + 39 = 0$

= Корни 3 и 13. Ну, надо же! Я Вижу!!! Еще хочу!

$x^2 — 3x + 2 = 0$

корни 1 и 2.

= Попался! Это все знают! 1 не является простым числом.

— Ну и что, хоть горшком назови, ну пусть 1 будет «сверх простым числом», но корнем этого уравнения оно является.

= Тогда я предлагаю такое уравнение $x^2 — 4x = 0$ и корни будут 0 и 4.

— Согласен. А реши такое $x^2 + 18x + 65 = 0$

= Решение 5 и 13.

— Неверно.

= Погоди, проверю $13 • 5 = 65$; $13 + 5 = 18$ ты не прав. Все верно.

— А ты подставь корни в квадратное уравнение.

= Да, не получается, а в чем дело.

— Ты забыл смотреть на знаки. Ответ будет -5 и -13

= Ну, надо же. А я думал, что все проще некуда.

— Давай разберемся со знаками. Вот базовая формула: x^2 **— S**x + **M** = 0. При коэффициенте M плюс будет если *оба корня положительны* **или** *оба они отрицательны*. Знак при S зависит от **суммы** положительных или отрицательных корней взятой со знаком минус.

= Чего-то ты перемудрил.

— Ну смотри. Если при M стоит минус. Значит насторожись, **один** из корней отрицателен.

Если + Sx + M, то к гадалке не ходи, оба корня отрицательны. Ну лучше опробуем все это на практике.

$x^2 — [5+2]x + [5•2] = x^2 — 7x + 10 = 0$

$x^2 — [-2+5]x + [-2•5] = x^2 — 3x — 10 = 0$

$x^2 — [-5+2]x + [-5•2] = x^2 + 3x — 10 = 0$

$x^2 — [-5 + -2]x + [-5•-2] = x^2 + 7x + 10 = 0$

= В общем понятно, - потренироваться надо.

— Приступай.

$x^2 — 8x + 12 = 0$;

$x^2 — 2x — 3 = 0$;

$x^2 — 5x + 4 = 0$;

$x^2 — 13x + 12 = 0$;

$x^2 — 7x + 12 = 0$;

$x^2 — 15x + 26 = 0$;

$x^2 + 14x + 45 = 0$;

$x^2 + 3x - 70 = 0$;

$x^2 — 12x + 35 = 0$;

— А дальше тренируйся дома «на кошках». Открой учебник и

пиши ответы.

— Давай разберем еще два случая.

$x^2 — 10x + 100 = 0$

= Чего-то не понял.

— Уравнение решения не имеет. 100 = 2•2•5•5 при любой комбинации сомножителей сумма будет больше 10.

= Занятно.

$x^2 — 6x + 9 = 0$

— Уравнение имеет единственное решение 3.

$x^2 — 5x + 9 = 0$

— А если так, то решений нет.

= Ну, надо же. И все исходит из волшебной системы?!!

— Как видишь, большинство «школьных» уравнений, ты решишь одной левой.

Но возможны и сложности, например, такой коварный случай:

$x^2 + 4x + 2 = 0$

= Как было сказано «два плюса значит — два отрицательных корня», но не соображу, как может сумма быть больше произведения?

— Подумай! Достаточно абсолютному значению хотя бы одного из корней быть меньше единицы, и в данном случае корни:

$—2 — \sqrt{2} \approx -3.414213562373095$

и

$—2 + \sqrt{2} \approx -0.5857864376269049$

= Т.е. просто глянув на формулу можно многое сказать о корнях, да интересно.

= А что ты называешь «школьным» уравнением.

— В свое время, учась в школе, я заметил, что школьная математика дается в «приглаженном» виде, посмотри в геометрических задачах все углы — 30˚, 45˚, 60˚, 90˚ а алгебре, как правило, в задании и в ответе целые числа. Последние называются Диофантовы уравнения.

//

Диофантово уравнение — это уравнение вида $P(x_1, \ldots, x_m) = 0$,

где *P* — целочисленная функция (например, полином с целыми коэффициентами), а переменные принимают целые значения. Названы в честь древнегреческого математика Диофанта.

//

— Кстати задача, которую мы изначально решали, также приписывается Диофанту.

= Вот приду завтра в школу и умою всех отличников.

— / вот выйду из тюрьмы. Куплю костюм с отливом.../

= Скажу Нельке «открой задачник на любой странице и выбери пример» и с ходу раз — ответ, и пока она пыхтит, проверяет, второй пример, третий.

— / Куплю костюм с отливом. И в Гагры.../

= Слушай. Чё-то мне не верится, что за две с половиной тысячи лет никто не нашел такого способа.

— И мне не верится. Но, мы не специалисты, наверное профессиональный математик скажет «на такой-то странице такой-то работы Гаусса или скажем Эйлера есть упоминание о данной теме, в качестве курьеза[3]».

— Но мне кажется, что это тайный инструмент составителей задачников для школьников. Согласись, что составить задачу с заданными свойствами ничего не стоит.

= Тогда Нельке я скажу «назови мне два числа, и я тебе напишу квадратное уравнение, где корнями буду эти два числа». Так пожалуй еще круче. .... но придется признаваться как я это делаю.

— Да не проблема, расскажи и покажи. Но, во время демонстрации помни о коварных случаях например $x^2 — 5x — 3 = 0$.

= Ничего, выкручусь, по крайней мере поражу народ своим анализом корней, а затем скажу, что сегодня с отрицательными корнями не хочу возится.

= А, вот еще вопрос. Мы с тобой рассматривали уравнения типа $x^2 + bx + c = 0$, а если будет **полное квадратное уравнение**: $ax^2 + bx + c = 0$?

— Элементарно, Ватсон. Раздели **полное** уравнение на **a,** и получишь **приведенное**, а дальше ты знаешь.

= Но тогда получатся дробные коэффициенты.

— Мудрость состоит в том, что не стоит бараном упираться в любой принцип, ежели разделение дроби на сомножители составляет трудность, вспоминай о дискриминанте и прочих радостях стандартной формулы.

Но давай поиграемся с корнями 0.5 и 1.5

$x^2 — [0.5 + 1.5]x + [0.5 \cdot 1.5] = x^2 — 2x + 0.75 = 0$

давай для удаления дроби, умножим на 100

$100x^2 — 200x + 75 = 0$

Т.е. по крайней мере составлять уравнение по **любым** корням ты сможешь, и разбитое сердце для Нелли обеспеченно.

= Я тоже хочу попробовать.

— Ну, давай, давай что-нибудь не обычное, пусть будет

корень из тринадцати, итак корни квадратного уравнения 1 + √13 и 1 — √13.

= Крибле крабле **бумс**: $x^2 — 2x — 12 = 0$

= «Айнун цванцих фирун зихцих» или как говорили древние финики «Повторение мать мучения»

— Финикийцы?!

= Финики — веселее. Давай я повторю все что понял:

1. Посмотреть на знаки

— + оба корня положительны

— — один корень отрицателен, но положительный больше

+ **—** один корень положителен, но отрицательный больше

+ + оба корня отрицательны

2. Если **M** меньше **S** значит абсолютная величина хотя бы одного корня больше нуля, но меньше единицы.

3. Если **M** удалось разложить на множителе и их сумма (с учетом знаков) равна **S** — демонстрируем свои феноменальные способности.

3а. Иначе, быстренько считаем дискриминант или шустренько врем «голова заболела,... я уже устал,... на сегодня достаточно...»

4. В случаях 2 и 3а — плавно переходим к демонстрации изготовления уравнений по заданным корням, это дело беспроигрышно (главное не запутаться в арифметике).

— Отлично. Теперь ты готов к подвигам.

= Спасибо, за отличный прикол. Это будет ШОУ!!!

— Успехов в кардио-математических делах.

notes

Примечания

2

Я не точен. Моя работа была невозможна без знания математической логики. Но это не школьный курс.

З

См. теорема Виета.